Problemes

Tornem a proposar dos problemes de l'Edgar Güeto, de la UPC, i un tercer del José Luis Díaz, també de la UPC. Aquest últim està formulat en termes de nombres complexos, però també es pot resoldre pensant només en nombres reals.

El professor David Jiménez Jiménez, del Departament d'Enginyeria Electrònica (UAB), ens ha enviat un problema molt similar al del billar que ocupa part de les solucions d'avui. No el proposem perquè modificant lleugerament la solució que publiquem més avall, es pot resoldre. Nogensmenys, aquest és l'enunciat que ens ha enviat el David Jiménez:

Sigui una taula de billar de forma rectangular de costats a i b nombres enters $[a \neq b]$. Toquem una bola des d'una cantonada qualsevol amb un angle de 45°, i suposem que la bola no pren cap efecte i que pot rodar indefinidament. A quina de les quatre cantonades del billar entrarà la bola?

Sobre aquest problema del billar, l'A41, hem rebut una solució del professor Claudio Cosín de l'IES Francisco de Goya, de Barcelona, que va més enllà de resoldre estrictament el problema. Pel seu interès i extensió, els editors del Butlletí de la Societat estan estudiant la seva possible publicació.

Com sempre, preguem als nostres lectors que si fan servir TEX o LATEX per escriure les seves solucions, les enviïn per correu electrònic a l'adreça:

`pelegri.viader@econ.upf.es`

així com qualsevol proposta o suggeriment.

Problemes proposats

A47. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Proveu que, per qualssevol $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{p^{2.5^n} + p^{5^n} + 1}{p^2 + p + 1} \in \mathbb{N}\,.$$

A48. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Considereu la seqüència $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, \ldots$ Proveu que no hi ha quatre termes de la sèrie que siguin naturals consecutius.

B49. (Proposat per José Luís Díaz, UPC, Terrassa.) Donats els números complexos a, b, c tots diferents i no nuls, proveu que

$$\frac{2a+b+c}{a(a-b)(a-c)} + \frac{a+2b+c}{b(b-a)(b-c)} + \\ + \frac{a+b+2c}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\,.$$

Solucions

Problemes proposats a SCM/Notícies 12 i a SCM/Notícies 14

A40. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Considerem la successió: $a_n - a_{n-1} = (a_{n-1} - 1)^2$, $a_1 = 2$. Trobeu $S = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots$

Solució: (Antoni Gomà , IES Joanot Martorell de Barcelona.) Si anomenen $S_k = \dfrac{1}{s_1} + \cdots + \dfrac{1}{s_k}$, suma parcial de la sèrie que ens cal sumar, es pot demostrar per inducció (és un càlcul senzill) que $S_{n-1} = \dfrac{a_n - 2}{a_n - 1}$. D'altra banda es pot escriure $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1) + 1$ i llavors, si $a_n \geq 2$ (cosa que estableix l'enunciat), es veu de seguida que la successió inicial és estrictament creixent.

D'aquests dos fets es dedueix que la successió de sumes parcials S_n és una subsuccessió de la successió de terme general $b_j = \dfrac{j}{j+1}$, que té límit 1. Per tant S_n també té límit 1. La suma S demanada és $S = 1$.

A41. (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Sigui $T = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, $k \geq 1$, un conjunt finit de naturals $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$. Proveu que existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall a \in T$, $\exists b \in T$ tal que

$ab = n$ si, i només si, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ es compleix:

$$\left(\frac{d_1 + \cdots + d_k}{1/d_1 + \cdots + 1/d_k}\right)^\alpha = \frac{d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha}{1/d_1^\alpha + \cdots + 1/d_k^\alpha}.$$

Solució: (Edgar Güeto, UPC.) **a)** Provarem primer la implicació fàcil, la qual ens donarà una idea de com abordar la segona. Suposem, doncs, que existeix un natural n de manera que, per qualsevol $d_i \in T$, tenim un $d_j \in T$ tal que $d_i d_j = n$. L'observació clau radica en el fet que $\forall a \in T$, $\frac{n}{a}$ també és de T, ja que estem suposant que existeix un b tal que $ab = n$. Llavors podem considerar el producte següent:

$$n\left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_k}\right) = d_{i_1} + \cdots + d_{i_k}\,,$$

on $\{d_1, \ldots, d_k\} = \{d_{i_1}, \ldots, d_{i_k}\}$. Però com l'ordre dels sumands no afecta el resultat, obtenim:

$$n\left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_k}\right) = d_1 + \cdots + d_k\,. \qquad \text{(I)}$$

Igualment, per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$, $(n/d_i)^\alpha = n^\alpha/d_i^\alpha$ i $n/d_i = d_r$ per un cert $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Llavors,

$$n^\alpha\left(\frac{1}{d_1^\alpha} + \cdots + \frac{1}{d_k^\alpha}\right) = d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha\,, \qquad \text{(II)}$$

per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$. De (I) obtenim que $n = \frac{d_1+\cdots+d_k}{1/d_1+\cdots+1/d_k}$ i de (II) que $n^\alpha = \frac{d_1^\alpha+\cdots+d_k^\alpha}{1/d_1^\alpha+\cdots+1/d_k^\alpha}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, d'on resulta fàcilment la primera implicació.

b) Tornem a tenir el conjunt $T = \{d_1, \ldots, d_k\}$, $k \geq 1$, amb $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, i suposem que per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$ es compleix

$$\left(\frac{d_1+\cdots+d_k}{1/d_1+\cdots+1/d_k}\right)^\alpha = \frac{d_1^\alpha+\cdots+d_k^\alpha}{1/d_1^\alpha+\cdots+1/d_k^\alpha}\,. \qquad \text{(III)}$$

Sigui $p = (d_1 + \cdots + d_k)/(1/d_1 + \cdots + 1/d_k)$ i definim $\overline{d_i} = p/d_i, i = 1, \ldots, k$. Llavors

$$p^\alpha = (d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha)/(1/d_1^\alpha + \cdots + 1/d_k^\alpha)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Passant el factor que divideix a la part esquerra de la igualtat obtenim

$$p^\alpha(1/d_1^\alpha + \cdots + 1/d_k^\alpha) = (p/d_1)^\alpha + \cdots + \\ + (p/d_k)^\alpha = d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha\,,$$

i aplicant la definició de $\overline{d_i}$, tenim

$$d_1^\alpha + \cdots + d_k^\alpha = \overline{d_1}^\alpha + \cdots + \overline{d_k}^\alpha\,, \qquad \text{(IV)}$$

per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ara ens agradaria veure que això només es pot complir si els $\overline{d_i}$ formen el mateix conjunt de naturals que els d_i, encara que ni tan sols sabem que els $\overline{d_i}$ són naturals. Donat que d_k és el major dels d_i, dividim (IV) per d_k^α:

$$(d_1/d_k)^\alpha + \cdots + (d_{k-1}/d_k)^\alpha + 1 = \\ = (\overline{d_1}/d_k)^\alpha + \cdots + (\overline{d_k}/d_k)^\alpha\,, \quad \text{(V)}$$

per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ara bé, quan α es fa arbitràriament gran, el costat esquerra de (V) tendeix a 1, i per tant el costat dret també. Si prenem un membre del costat dret, veiem que quan $\alpha \to +\infty$, $(\overline{d_i}/d_k)^\alpha$ tendeix a 0 si $\overline{d_i} < d_k$, o bé tendeix a 1 si $\overline{d_i} = d_k$, i tendeix a $+\infty$ si $\overline{d_i} > d_k$, per $i = 1, \ldots, k$. Llavors necessàriament $\overline{d_i} \leq d_k$, $i = 1, \ldots, k$. Però a més ha d'haver-hi un únic $\overline{d_i}$ igual a d_k per tal que el costat dret tendeixi a 1 quan α tendeixi a infinit. Per tant, tornant a (V), veiem que podem suprimir els termes iguals de les dues bandes, amb la qual cosa podem tornar a repetir el mateix argument, aquest cop sobre d_{k-1}. Finalment arribem al fet que el conjunt dels $\overline{d_i}$ és el mateix que el dels d_i, $i = 1, \ldots, k$. Per tant, donat un $d_i \in T$, $\overline{d_i}$ és tal que $\overline{d_i} \in T$ i $d_i\overline{d_i} = p$, per la mateixa definició de $\overline{d_i}$, $i = 1, \ldots, k$, i donat que tant d_i com $\overline{d_i}$ són naturals, també ho és p, amb la qual cosa hem provat el que volíem.

Com a exemples... Donat un $k \in \mathbb{N}, k > 0$, sabríeu trobar un conjunt T de k elements amb les propietats anteriors?

Només cal trobar, per exemple, un nombre natural amb exactament k divisors. Si k és 4, tenim que, per exemple, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ compleix les propietats exigides: donat l'1, tenim que $1 \cdot 6 = 6$; donat el 2, $2 \cdot 3 = 6$; donat el 3, $3 \cdot 2 = 6$; i donat el 6, $6 \cdot 1 = 6$. Per tant s'ha de complir que per qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{1 + \cdots + 6}{1/1 + \cdots + 1/6}\right)^\alpha = \frac{1^\alpha + \cdots + 6^\alpha}{1/1^\alpha + \cdots + 1/6^\alpha}\,,$$

la qual cosa es pot comprovar fàcilment. Si prenem el conjunt de tots els divisors de n, D_n, veiem que també $T = D_n - \{a, \overline{a}\}$ funciona, on $a \in D_n$ i $\overline{a} = n/a$. Si voleu podeu provar que, donades les condicions sobre T, $(d_1 \cdots d_k)^2 = p^k$. Deduïu que, si k és senar, llavors p és un quadrat perfecte, i que, per tant, existeix un $d_i \in T$ tal que $d_1 \cdots d_k = d_i^k$.

Solucions als problemes proposats a SCM/Notícies 13

Recordem que per error en el Notícies 13 va sortir A40, A41, A42 quan havia de ser A43, A44, A45.

A43. (Proposat per l'IES de La Bisbal.) *El Pentadescomponible.* Per quins valors de l'enter N és possible trobar un enter positiu més petit que N i només un, que accepti ser descompost de 5 maneres diferents com a suma d'enters consecutius? (Del diccionari: **Suma:** agregat de dos o més nombres.)

Solució: (Victòria Oliu i Xavier Codolà, IES de La Bisbal.) La resposta del problema és $10 \leq N \leq 18$. Vegem com s'hi arriba. Descomposem cada número en suma d'enters consecutius, començant per $M = 1$, de totes les maneres possibles (el 0 és considerat un nombre enter com qualsevol altre):

$M = 1$ Una: $0 + 1$
$M = 2$ Una: $(-1) + 0 + 1 + 2$
$M = 3$ Una:
$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$
$M = 4$ Una:
$(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 +$
$+2 + 3 + 4$
$M = 5$ Una:
$(-4) + (-3) + (-2) +$
$+(-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$M = 6$ Tres:
$(-5) + (-4) + (-3) + (-2) +$
$+(-1) + 0 + 1 + 2 + 3 +$
$+4 + 5 + 6.$
$0 + 1 + 2 + 3.$
$1 + 2 + 3.$
$M = 7$ Una:
$(-6) + (-5) + (-4) + (-3) +$
$+(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 +$
$+4 + 5 + 6 + 7$
$M = 8$ Una:
$(-7) + (-6) + (-5) + (-4) +$
$+(-3) + (-2) + (-1) + 0 +$
$+1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$M = 9$ Cinc:
$(-8) + (-7) + (-6) + (-5) +$
$+(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 +$
$+1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$
$2 + 3 + 4.$
$(-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4.$
$(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 +$
$+3 + 4 + 5.$
$4 + 5.$

La solució del problema és $N = 10$ i tots els enters consecutius fins a trobar el següent enter que admeti 5 descomposicions.

Analitzant una mica el problema, hem estudiat la manera sistemàtica d'escriure totes les possibles descomposicions d'un nombre enter positiu com a suma d'enters consecutius, per assegurar-nos que no ens deixem cap descomposició. Hem fet un programa d'ordinador que escriu totes les descomposicions d'un nombre. Però el més interessant ha estat que aquesta anàlisi ens ha dut a una sèrie de conclusions sorprenents i ens ha inspirat nous problemes que poden ser plantejats, obvis (potser alguns no tant) un cop es té l'anàlisi feta. Per exemple:

a) Qualsevol nombre primer admet exactament 3 descomposicions en suma d'enters consecutius.
b) El nombre de descomposicions que admet N és igual al nombre de descomposicions que admet $2N$
c) N és potència de 2 si i només si admet una única descomposició en suma d'enters consecutius.
d) Quin nombre té el record de descomposicions diferents en suma d'enters consecutius, entre els nombres compresos entre A i B?

L'apartat b) ens assegura que el 18 tindrà també 5 descomposicions en suma d'enters consecutius. Només cal comprovar que no hi ha cap més nombre entre 9 i 18 que es descompongui de 5 maneres diferents. Efectivament la resposta del problema és $10 \leq N \leq 18$.

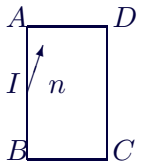
La conclusió de la nostra anàlisi constructiva és que el nombre de descomposicions de M en suma d'enters consecutius és igual a $2k - 1$, essent k el nombre de divisors imparells de M.

I, finalment, els pentadescomponibles són els nombres de la forma $2^n \cdot p^2$, essent p un nombre primer diferent de 2.

A44. (Proposat per l'IES Francisco de Goya.) En un full de paper quadriculat simularem algunes jugades de billar. En aquest full dibuixarem un rectangle $ABCD$ de 10 quadradets de llarg per 6 quadradets d'amplària. Siga I el punt mitjà del costat AB. Sobre aquest punt col·loquem una bola de billar i la colpegem amb el tac cap al costat AD. Quan la bola toca per

primera vegada el costat AD, haurà descrit un segment de recta de pendent n.

Proveu que, si a les nostres jugades n és sempre un nombre natural i no existeix fregament de la bola amb la superfície de la taula, la bola sempre retorna a I, descrivint una *trajectòria periòdica*.



Al llarg del seu viatge a través de la taula, la bola només toca en un nombre finit de punts diferents a les bandes. Demostreu que la quantitat de punts que ha tocat la bola la banda AB és la mateixa que la quantitat de punts tocats per la bola a la banda DC i calculeu aquest nombre de punts en funció del valor de n.

Solució: (Anna Pol, IES Jaume Vicens Vives de Girona.) Quan la bola colpeja un costat, rebota seguint una trajectòria simètrica respecte l'eix que passa pel punt de contacte i és perpendicular al costat. Per tant, si considerem un rectangle simètric respecte d'aquest costat, la nova trajectòria quedarà alineada amb l'anterior. Així, podem construir una xarxa de rectangles, on dos rectangles adjacents són simètrics respecte al costat comú, i en aquesta xarxa la trajectòria de la bola serà una línia recta. Prenent coordenades, amb origen el vèrtex B i eixos els que passen pels costats BC i BA tenim que sobre les rectes $y = 2k\cdot 10$, $k \geq 0$ s'hi troben els punts que es corresponen amb els vèrtexs B i C. Sobre les rectes $y = (2k+1)\cdot 10$, $k \geq 0$ s'hi troben els punts que es corresponen amb els vèrtexs A i D. Sobre les rectes $x = 2k\cdot 6$, $k \geq 0$ els punts que es corresponen amb els vèrtexs B i A. I, finalment, sobre les rectes $x = (2k+1)\cdot 6$, $k \geq 0$, els punts que es corresponen amb els vèrtex D i C.

Si la bola inicia el recorregut seguint un segment de pendent $n \in \mathbb{N}$, per esbrinar si la bola retorna al punt inicial $I = (0, 5)$ cal veure si el sistema $y = nx + 5$; $x = 2k\cdot 6$ té per solució un punt amb ordenada $y = a\cdot 10 + 5$ i trobar-la pel valor més petit de k.

Si $n = b\cdot 5$, existeix una solució quan $k = 1$, i en qualsevol altre cas, quan $k = 5$.

D'això es conclou que, per $n \in \mathbb{N}$, la bola sempre retorna a I. Si el pendent del segment inicial és múltiple de 5, la bola només toca un cop CD i retorna a I; en qualsevol altre cas, la bola colpeja 5 cops el costat AB i 5 cops el costat CD.

Per altra banda, calculant el valor de la y del punt que es correspon amb l'inicial I, podem saber quantes vegades colpeja la bola en els altres costats AB i AD.

Si $n = b\cdot 5$ i, per tant, $k = 1$, $y = 60\cdot b + 5$, la trajectòria talla $6b$ vegades les rectes $y = k\cdot 10$ i, per tant, la bola colpeja $3b$ vegades cada costat.

Per qualsevol altre valor de n, $k = 5$ i $y = 60\cdot n + 5$, per tant, la bola colpeja $3n$ vegades cada costat.

A45. (Proposat per l'IES Joanot Martorell.) Si tirem quatre daus enlaire, quina és la probabilitat que després de tirar puguem triar dos daus de manera que la suma dels punts que marquen aquests dos daus sigui 7? I si en tirem n en comptes de 4?

Solució: (Antoni Gomà, IES Joanot Martorell de Barcelona.) Calcularem la probabilitat de l'esdeveniment contrari al que es demana. Observem que si es tiren n daus, $n \geq 4$, sempre que surtin 4 nombres diferents en el conjunt dels daus, serà possible trobar-ne dos que sumin 7. Per tant bastarà calcular les probabilitats següents:

a) que surti el mateix nombre en tots els n daus; si és així no podrem trobar dos daus que sumin 7.
b) que en el conjunt dels n daus surtin dos nombres diferents i només dos i que siguin dos números que no sumin 7. Les possibles parelles són 12, a saber: 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,6; 3,5; 3,6; 4,5; 4,6 i 5,6.
c) que en el conjunt dels n daus surtin exactament tres nombres diferents i que entre aquests nombres no hi hagi cap parella que sumi 7. Hi ha 8 possibles ternes: 1,2,3; 1,2,4; 1,3,5; 1,4,5; 2,3,6; 2,4,6; 3,5,6 i 4,5,6.

Passem al càlcul.

a) La probabilitat és $6\cdot\frac{1}{6^n}$
b) Per cadascuna de les 12 parelles la probabilitat s'obtindrà calculant la probabilitat que surti en tots els daus un dels dos números, és a dir, $\left(\frac{2}{6}\right)^n$, i restant-ne els casos (ja comptats) en què en tots els daus surt el mateix número, un dels dos que interessen. En total, doncs, $12\cdot\left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$.

c) Per cadascuna de les 8 ternes calculem la probabilitat que surti en tots els daus un dels tres números, és a dir, $\left(\frac{3}{6}\right)^n$. Caldrà restar en cada cas la probabilitat de les 3 situacions (ja comptades) en què només surten dos dels números *en joc*, que serà $3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n$. Però si ho fem així haurem restat dues vegades la probabilitat que surtin tots els números iguals. Caldrà tornar a sumar (per cada terna) aquesta probabilitat, $3\left(\frac{1}{6}\right)^n$. La probabilitat total d'aquest apartat serà, doncs:

$$8 \cdot \left(\tfrac{3}{6}\right)^n - 24 \cdot \left[\left(\tfrac{2}{6}\right)^n + 24 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^n\right].$$

Si sumem les tres probabilitats calculades tindrem la probabilitat que, tirant n daus, **no** pugem trobar dos daus que sumin 7. Aquesta probabilitat és $8 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^n - 12 \cdot \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$.

I la probabilitat que demanava l'enunciat és $1 - 8 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^n + 12 \cdot \left[\left(\frac{2}{6}\right)^n - 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$, que es pot comprovar que tendeix molt ràpidament cap a 1 a mesura que augmenta la quantitat de daus que es tiren.

Pelegrí Viader
UPF

Tesis

- Joan Antoni Sellarés Chiva va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran Hurtado i Xavier Pueyo, titulada *Structural and algorithmic aspects of geometric projections*, el dia 5 de maig de 2000. La tesi correspon al Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Les projeccions perspectives ens permeten representar objectes tridimensionals en una superfície plana bidimensional de manera que es pot observar la seva profunditat a l'espai, tal com passa amb la visió humana. Les projeccions perspectives s'utilitzen àmpliament en diferents camps relacionats amb la ciència de la computació. En conseqüència, l'estudi dels aspectes estructurals i algorísmics de les projeccions, lluny d'estar acabats, han pres nova importància en aquests camps.

L'objectiu principal de la tesi és estudiar i resoldre, fent servir algunes tècniques de geometria computacional, problemes geomètrics i algorísmics relacionats amb les projeccions perspectives que proporcionen solucions útils als gràfics per computador, al dibuix de grafs, a la visió per computador, a la tomografia geomètrica i a la geometria computacional.

Es mostra com obtenir «bones» projeccions perspectives considerant diferents criteris especialment rellevants en qüestions de visualització en gràfics per computador i dibuix de grafs. Es consideren problemes que són importants amb relació als supòsits de no-degeneració i robustesa en els algorismes que s'estudien en geometria computacional. També s'examinen problemes de verificació d'imatges i de verificació de correspondències entre imatges relacionats amb la visió per computador i la tomografia geomètrica. Finalment s'estudien propietats estructurals de les projeccions perspectives que es poden aplicar al modelat i visualització basats en imatges (IBM & R) per a millorar diferents aspectes de la representació i visualització d'escenes en gràfics per computador.